# Examen universitaire de l'ACP (2014)

Préparé par le département de physique et d'astronomie, Western University
(Version française : département de physique, Université de Sherbrooke)

mardi, 4 février 2014

Durée : 3 heures

Nom:__________________________ Prénom:______________________________

Institution:____________________________________________________________

Instructions:

1. Cet examen comporte 10 questions, toutes de même poids, mais de difficulté variable.
2. Cet examen dure trois heures.
3. On ne s'attend pas à ce que vous puissiez compléter toutes les questions; planifiez donc votre temps sagement.
4. Cet examen comporte 23 pages. Inscrivez votre nom et institution dans l'espace désigné à cette fin *sur chaque page* (les différents problèmes sont corrigés par des personnes différentes).
5. Écrivez votre solution sur les pages fournies; vous pouvez utiliser le verso au besoin.
6. Les calculatrices sont permises, mais pas les livres, manuels, ou autres sources.
7. Les ordinateurs, téléphones portables ou autres appareils capables de se connecter sur internet sont interdits.

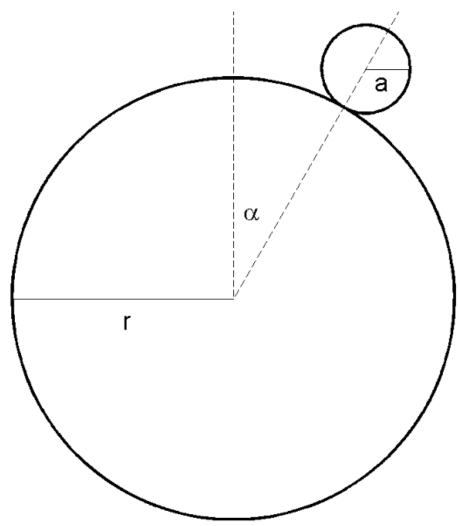
Quelques constantes:

$$c = 3{,}00 \times 10^{8}\ \text{m s}^{-1}$$
$$e = 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C}$$
$$\hbar = 1{,}05 \times 10^{-34}\ \text{J s}$$
$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/(\text{N m}^2)$$
$$m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg}$$

Nom:____________________________________ Institution:_________________________________

1. Une balle de rayon $a$ roule sans glisser sur la surface d'une sphère rugueuse fixe de rayon $r$, en partant du repos au sommet. L'angle $\alpha$ est défini sur la figure. Montrez que la balle perd contact avec la sphère quand $\cos\alpha = 10/17$.

*Indice : le moment d'inertie d'une sphère de masse m et de rayon* $R$ *est* $\frac{2}{5}mR^2$ .



Nom:___________________________________ Institution:________________________________

Nom:___________________________________ Institution:_________________________________

2. Le mouvement d'un milieu, tel que l'eau, a un effet sur la vitesse de la lumière dans ce milieu, tel qu'observé par Fizeau en 1851.

   Considérez un faisceau de lumière qui suit l'axe d'un tuyau horizontal rempli d'eau, l'eau se déplaçant à une vitesse $v$. Déterminez la vitesse $u$ de la lumière telle que mesurée dans le référentiel du laboratoire, si le faisceau se propage dans le même sens que l'écoulement d'eau. Trouvez une approximation à l'expression obtenue, valable quand $v$ est beaucoup plus petit que $c$.

*Indice: La formule d'addition des vitesses en relativité est* $u = \dfrac{u' + v}{1 + \dfrac{u'v}{c^2}}$.

Nom:___________________________________ Institution:________________________________

Nom:___________________________________ Institution:_________________________________

3. Représentez-vous l'électron comme une coquille vide de rayon $R$ chargée uniformément, de charge totale $e$. L'énergie potentielle contenue dans le champ électrique est

$$U_e = \frac{1}{2}\int \varepsilon_0 E^2 dV\,,$$

où l'intégrale porte sur tout l'espace.

a. Calculez l'énergie potentielle totale $U_e$ contenue dans le champ électrique.

b. Supposez que toute l'énergie de masse de l'électron provient de cette énergie $U_e$ , de sorte que

$$U_e = m_e c^2.$$

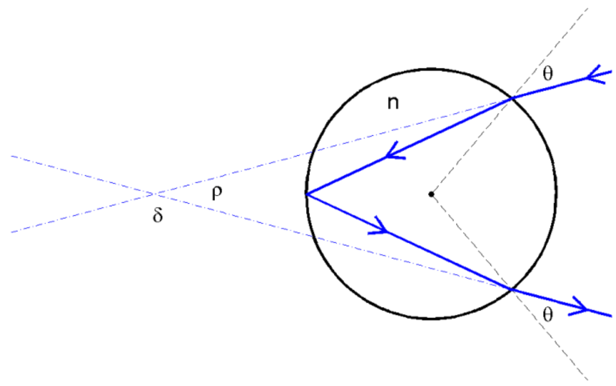
Déterminez le rayon de l'électron dans ce scénario.

*Indice : en coordonnées sphériques,* $dV = r^2 \sin\theta \; dr \; d\theta \; d\varphi$ *.* $\varphi$ *va de 0 à* $2\pi$ *et* $\theta$ *de 0 à* $\pi$ *.*

Nom:____________________________________ Institution:_________________________________

Nom:___________________________________ Institution:________________________________

4. L'arc-en-ciel est causé par le passage de rayons lumineux à travers des gouttelettes d'eau, comme illustré ci-contre. Le point indique le centre de la gouttelette. Le chemin suivi par le rayon est représenté par la droite pleine. L'angle d'incidence du rayon est $\theta$. $\delta$ est l'angle de déviation du rayon par rapport à sa direction initiale. L'angle $\rho$ est la largeur angulaire de l'arc-en-ciel, soit $\pi - \delta$.




Étant donné que $\rho$ est tel que $\dfrac{d\rho}{d\theta} = 0$, calculez $\rho$ en fonction de l'indice de réfraction $n$ de la gouttelette. Supposez que l'indice de réfraction de l'air est 1.

Obtenez les valeurs numériques de $\rho$ pour la lumière bleue ($n$ = 1,3439) et la lumière rouge ($n$ =1,3316). Utilisez votre réponse pour expliquer l'ordre des couleurs dans un arc-en-ciel.

*Indice :* $\dfrac{d}{d\theta}\arcsin u = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{d\theta}$

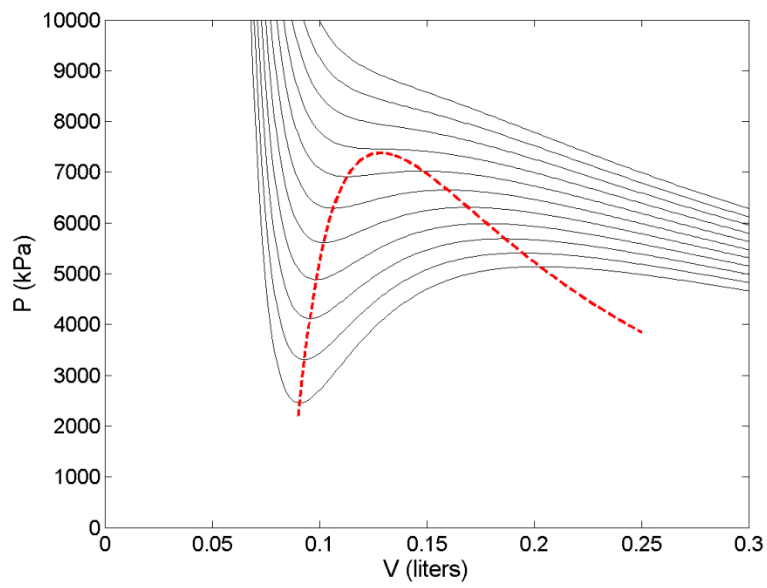
Nom:___________________________________ Institution:________________________________

Nom:____________________________________ Institution:__________________________________

5. L'équation d'état de van der Waals est

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

où $P$ est la pression, $V$ le volume du contenant et $T$ la température absolue. $a$ et $b$ sont des constantes qui dépendent du gaz. Dans le $CO_2$, $a$ = 365.8 kPa $L^2/mol^2$ et $b$ = 0.04286 L/mol (kPa = kilopascals; L = litres; mol = moles). La figure ci-dessous illustre le diagramme de phase pression-volume du $CO_2$ calculé à l'aide de cette équation d'état. Les courbes noires sont les isothermes, donnant la pression en fonction du volume à température fixe. La courbe hachurée est la spinodale, qui relie les maximums des isothermes, soit tous les points tels que $(dP/dV)_T = 0$.




a) Indiquez par une flèche la direction des températures croissantes à $V$ constant.

b) La région du diagramme de phase au dessous de la spinodale est thermodynamiquement instable. Expliquez pourquoi. Décrivez ce qui arrive à un gaz qui est préparé à une pression, un volume et une température compatibles avec la loi de van der Waals dans cette région. Les régions à droite et à gauche de la spinodale sont thermodynamiquement stables; à quoi correspondent-elles physiquement?

c) Trouvez l'équation $P(V)$ de la spinodale en fonction de $a$ et $b$.

d) Le maximum de la spinodale est appelé le *point critique* du gaz. Trouvez la pression, le volume et la température du point critique en fonction de $a$ et $b$. Montrez que, dans le cas du $CO_2$, $P_c = 7370$ kPa, $V_c = 0.129$ L, and $T_c = 304$ K.

Nom:___________________________________ Institution:________________________________

Nom:___________________________________ Institution:________________________________

Nom:___________________________________ Institution:________________________________

6.

a. Donnez une estimation du trou le plus profond qui pourrait être foré dans la croûte terrestre. Supposez que la croûte est composée de granite, dont la résistance à la compression est de 300 MPa et la densité 2700 kg/m$^3$. Commentez la validité de votre estimation.

b. Concevez grossièrement un appareil capable de forer un tel trou et, en même temps, d'enregistrer la température en fonction de la profondeur et de rapporter des échantillons de roche à la surface. Quels facteurs doivent être pris en compte dans la conception d'un tel appareil?

c. Pourquoi le forage d'un tel trou serait-il intéressant, d'un point de vue scientifique?

Nom:___________________________________ Institution:________________________________

Nom:___________________________________ Institution:_________________________________

7. La matière au sein d'une étoile est attirée vers son centre par la gravité. Cette force est contrebalancée par un gradient de pression, car la pression augmente vers l'intérieur de l'étoile. Décomposez l'étoile en un ensemble de coquilles concentriques d'épaisseur *dr*, chacune de rayon *r*, de densité $\rho(r)$ et de masse $dM(r)$.

   a) Trouvez l'expression de $dM/dr$.

   b) En considérant les forces agissant sur une coquille donnée, trouvez l'expression du gradient $dP/dr$, *P* étant la pression.

   c) Calculez la pression $P(r)$ à l'intérieur d'une étoile de masse totale $M_S$, de rayon $R_S$ et de densité centrale $\rho_c$, si la densité varie en fonction de *r* comme

$$\rho(r) = \rho_c\left(1 - \frac{r}{R_S}\right).$$

Nom:___________________________________ Institution:________________________________

Nom:___________________________________ Institution:__________________________________

8. Le champ de vitesse $\bar{v} = (u, v, w)$ d'un fluide obéit à l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla)\bar{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \bar{g} + \eta \nabla^2 \bar{v}.$$

où t est le temps, $\rho$ la densité du fluide, $\eta$ la viscosité, $p$ la pression et $g$ l'accélération gravitationnelle. Dans un fluide incompressible, la relation

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0.$$

s'applique.

Considérez un fluide incompressible visqueux qui occupe l'espace $0 < y < \infty$ au-dessus d'une plaque infinie occupant le plan $y = 0$. La plaque oscille dans la direction $x$ avec une vitesse $U \cos(\omega t)$. Supposez que la vitesse du fluide tende vers zéro quand $y \to \infty$. Supposez en outre que le fluide ne glisse pas sur la surface de la plaque, de sorte que la vitesse du fluide à $y = 0$ coïncide avec celle de la plaque. Aucun gradient de pression externe n'est appliqué et on néglige l'effet de la gravité, de sorte que $\nabla p = \bar{g} = 0$.

a) Décrivez qualitativement le comportement de chaque composante du champ de vitesse en fonction de la position et du temps. Justifiez votre réponse.

b) Simplifiez l'équation de Navier-Stokes afin qu'elle s'applique à ce problème précis et solutionnez-la pour obtenir le champ de vitesse.

c) Faites un graphique sommaire de votre solution pour la composante $x$ du champ de vitesse en fonction de $y$, pour un temps $t$ donné.

*Indice:* $i^{1/2} = \frac{1}{2^{1/2}}(1 + i)$.

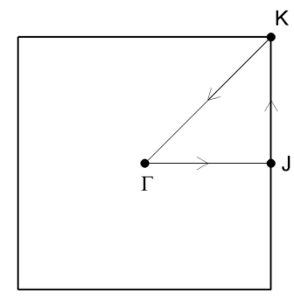
Nom:___________________________________ Institution:________________________________

Nom:___________________________________ Institution:________________________________

Nom:_________________________________ Institution:______________________________

9. Considérez un matériau isolant à structure cubique simple dont la constante de maille est $a$. Le plan $x$-$y$ est un plan (001) du réseau cristallin. La relation de dispersion de la bande de conduction la plus basse est

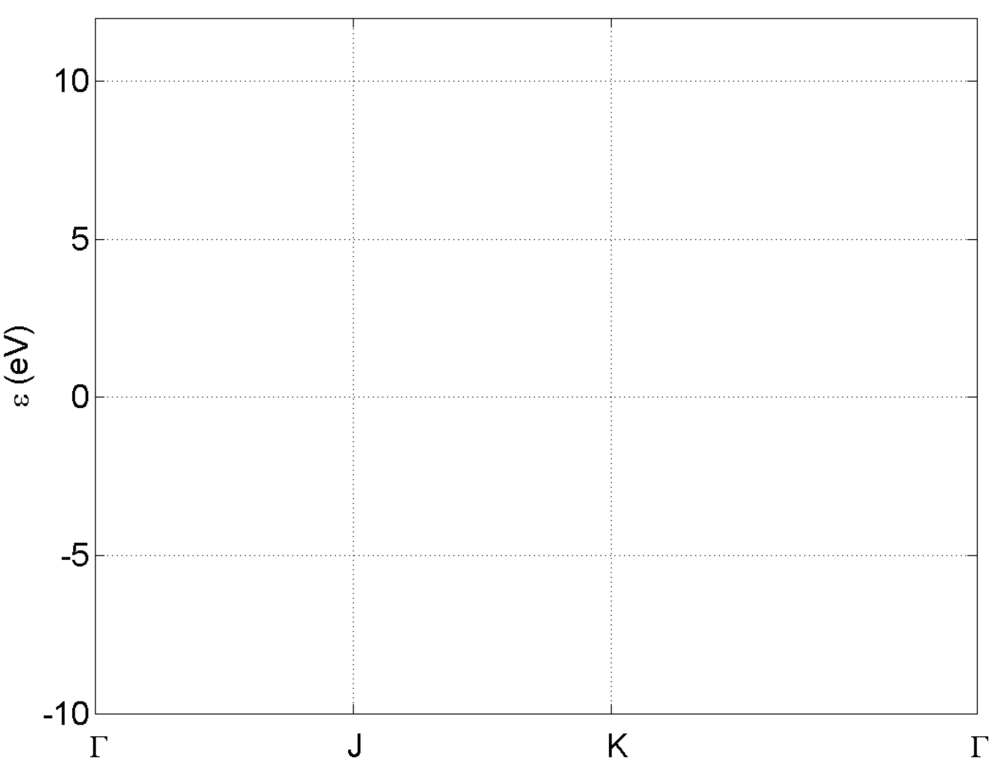
$$\varepsilon(k_x, k_y, k_z) = E_0 + 2V_0[\cos(k_x a) + \cos(k_y a) + \cos(k_z a)],$$




où $E_0 = 3{,}2$ eV et $V_0 = 1{,}1$ eV. $\bar{k} = (k_x, k_y, k_z)$ est un vecteur dans l'espace réciproque. Certains points de symétrie dans le plan $k_x - k_y$ ont des noms particuliers, comme indiqué sur la figure ci-contre. Le point $\Gamma$ désigne $(k_x, k_y) = (0,0)$, J désigne $(k_x, k_y) = (0, \pi/a)$ et K désigne $(k_x, k_y) = (\pi/a, \pi/a)$.

a) Faites un graphique de l'énergie minimum et maximum de la bande de conduction le long des segments $\Gamma - \mathrm{J}$, $\mathrm{J} - \mathrm{K}$, and $\mathrm{K} - \Gamma$ dans le plan $k_x - k_y$, en supposant que $\cos k_z a$ varie de $-1$ to +1. Utilisez le modèle fourni ci-dessous.

b) L'énergie de Fermi de ce système est –3,32 eV. Indiquez où se trouve cette énergie sur votre graphique. Dans quelles régions (sur le plan $k_x - k_y$ ) la bande de conduction est-elle occupée et dans quelles régions est-elle inoccupée?



Nom:___________________________________ Institution:________________________________

Nom:_________________________________ Institution:______________________________

10. L'ancienne théorie quantique était basée sur un principe heuristique connu sous le nom de *règle de quantification de Bohr-Sommerfeld*. Cette règle détermine quels états d'un système classique constituent des états quantiques permis. En dimension un, la règle de Bohr-Sommerfeld prend la forme suivante :

$$\oint p\,dx = nh$$

où $p$ est la quantité de mouvement, $x$ la coordonnée associée, $h$ la constante de Planck et $n$ un nombre quantique. L'intégrale est prise sur un chemin fermé. Utilisez cette règle pour calculer les niveaux d'énergie d'une balle qui rebondit de manière élastique dans la direction verticale.

*Indice:* $\int (ax+b)^{1/2}\,dx = \frac{2(ax+b)^{3/2}}{3a}$.

Nom:____________________________________ Institution:_________________________________